Época Normal: 5 de junho de 2020

Duração: 2h

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

Nota prévia: no que se segue apresenta-se uma sugestão de resolução para UMA das versões do exame; as resoluções para as outras versões são equivalentes com as devidas alterações numéricas

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 3 & 0 \\ 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$.

(a) Classifique, em função dos valores de α, a forma quadrática $Q(\overline{x}) = \overline{x}^T A\overline{x}$, com $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$.

Resolução:
Como A é uma matriz simétrica podemos classificar a forma quadrática através da classificação da matriz A.
Visto que, por hipótese, $\alpha \neq \pm 3$, sabemos que $|A| \neq 0$ e portanto, a matriz pode ser sempre classificada pela cadeia de menores principais primários de A:

$$\Delta_1 = \alpha, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 3 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 9 \text{ e } \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 3 & 0 \\ 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 9.$$

Temos então:
$\Delta_1 > 0$ sse $\alpha > 0$;
$\Delta_2 > 0$ sse $\alpha^2 - 9 > 0$ sse ($\alpha < -3$ ou $\alpha > 3$);
$\Delta_3 > 0$ sse $\alpha^2 - 9 > 0$ sse ($\alpha < -3$ ou $\alpha > 3$);
Visto que $\Delta_3 \neq 0$, para todo $\alpha \neq \pm 3$, a matriz A (e consequentemente a forma quadrática Q) só poderá ser definida positiva, definida negativa ou indefenida.
Assim:
A é definida positiva sse $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 e \Delta_3 > 0$: isto é, se $\alpha > 3$;
A é definida negativa sse $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 e \Delta_3 < 0$; como no nosso caso $\Delta_2 = \Delta_3$, não existem valores de α para os quais a matriz seja definida negativa;
Como $|A| \neq 0$, nos casos em que não é definida positiva, nem definida negativa a matriz é indefenida; portanto será indefenida para $\alpha < 3$, $\alpha \neq -3$;

(b) Calcule, ou prove que não existe, um valor de α para o qual $(1, 1, 0)$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio 1.

Resolução:
Sabemos que $\overline{u}$, vetor não nulo, é vetor próprio de A associado ao valor próprio 1 se e só $A\overline{u} = \overline{u}$.
Assim, $(1, 1, 0)$ será vetor próprio de A associado ao valor próprio 1 se e só se

$$\begin{bmatrix} \alpha & 3 & 0 \\ 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ou seja } \begin{bmatrix} \alpha + 3 \\ 3 + \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $(1, 1, 0)$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio 1 se e só se $\alpha + 3 = 1$, isto é $\alpha = -2$.

2. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{\ln(x-1)\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{\sqrt{y}}$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

Resolução:

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 > 0 \wedge 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \sqrt{y} \neq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y > 0\}. \end{aligned}$$

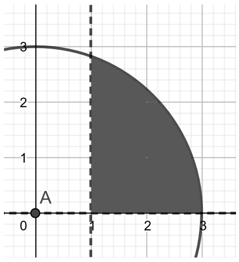

Figura 1: Gráfico do exercício 2(a)

(b) Defina analiticamente o interior e a fronteira do conjunto D_f.

Resolução:
$int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \wedge x^2 + y^2 < 9 \wedge y > 0\}$;
$fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq 0\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9 \wedge x \geq 1 \ \wedge y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x \geq 1\}$.

3. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-2)^2 \sin(y-2)}{x^2 + (y-2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,2) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,2) \end{cases}$.

(a) Mostre que a função f é contínua no ponto $(0,2)$.

Resolução:
A função f será contínua no ponto $(0,2)$ se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = f(0,2).$$

Assim, para provar a continuidade de f em $(0,2)$ basta provar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{(y-2)^2 \sin(y-2)}{x^2 + (y-2)^2} = 0.$$

Por enquadramento,

$$0 \leq \left| \frac{(y-2)^2 \sin(y-2)}{x^2 + (y-2)^2} - 0 \right| \leq \frac{(x^2 + (y-2)^2)|\sin(y-2)|}{x^2 + (y-2)^2} = |\sin(y-2)|,$$

e como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} |\sin(y-2)| = 0$, fica provado que a função f é contínua em $(0,2)$.

(b) Mostre que a função admite derivada no ponto $(0,2)$ segundo qualquer vetor (v_1, v_2) e calcule-a. Utilize o resultado obtido para indicar o valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,2)$.

Resolução:
Sendo $(v_1, v_2) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} \partial_{(v_1,v_2)} f(0,2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + hv_1, 2 + hv_2) - f(0,2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(hv_2)^2 \sin(hv_2)}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 v_2^2 \sin(hv_2)}{h^3(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(hv_2)}{h} = \frac{v_2^3}{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = \partial_{(1,0)} f(0,2) = \frac{0^3}{1^2 + 0^2} = 0$;
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = \partial_{(0,1)} f(0,2) = \frac{1^3}{0^2 + 1^2} = 1$;

4. Considere a função $f(x,y) = y\ln(xy) - x$. Determine e classifique os pontos críticos de f.

Resolução:
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$;
(x,y) é ponto crítico de f sse

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y.(\frac{y}{xy}) - 1 = 0 \\ \ln(xy) + y(\frac{x}{xy}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \ln(xy) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \ln(x^2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \pm e^{-1/2} \end{cases}$$

Logo, os pontos críticos de f são $(e^{-1/2}, e^{-1/2})$ e $(-e^{-1/2}, -e^{-1/2})$.
A matriz Hessiana de f num ponto $(x,y) \in D_f$ é $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \end{bmatrix}$.
Nos pontos críticos temos:
$H_f(e^{-1/2}, e^{-1/2}) = \begin{bmatrix} -e^{1/2} & e^{1/2} \\ e^{1/2} & e^{1/2} \end{bmatrix}$, matriz cujos menores principais primários são $\Delta_1 = -e^{1/2} < 0$ e $\Delta_2 = -e - e = -2e < 0$ e portanto é indefenida;
E temos $H_f(-e^{-1/2}, -e^{-1/2}) = \begin{bmatrix} e^{1/2} & -e^{1/2} \\ -e^{1/2} & -e^{1/2} \end{bmatrix}$, matriz cujos menores principais primários são $\Delta_1 = e^{1/2} > 0$ e $\Delta_2 = -e - e = -2e < 0$ e assim é também indefenida;
Desta forma concluímos que ambos os pontos críticos são pontos de sela;

5. Considere o conjunto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 3x \leq y \leq 6 \wedge x \geq 0\}$.

(a) Calcule, utilizando um integral duplo, a área da figura plana definida por Ω.

Resolução:
A área de Ω é dada por $\iint_\Omega 1dxdy$.
O conjunto Ω pode escrever-se facilmente de uma das 2 seguintes formas:
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \;\wedge\; 3x \leq y \leq 6\}$ (como conjunto de tipo I) ou
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 6 \;\wedge\; 0 \leq x \leq \frac{y}{3}\}$ (como conjunto de tipo II);
Asssim, escolhendo uma das duas formas anteriores de escrever Ω (por exemplo, como conjunto de tipo I) temos

$$\iint_\Omega 1dxdy = \int_0^2 \left(\int_{3x}^6 1dy \right) dx = \int_0^2 (6-3x)dx = \left[6x - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 = 12 - 6 = 6.$$

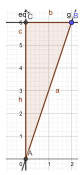

Figura 2: Gráfico do exercício 5(a)

(b) Calcule $\displaystyle\iint_\Omega e^{y^2} dxdy$.

Resolução:
Comece por notar que não consegue primitivar a função e^{y^2} de uma forma simples como função de y (e simultaneamente repare que esta função é constante como função de x) e portanto, mesmo que na alínea anterior tenha escrito o conjunto Ω como conjunto de tipo I ao ver que não consegue calcular $P_y(e^{y^2})$ deve re-escrever o conjunto Ω como conjunto de tipo II.
Desta forma, escrevendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 6 \;\wedge\; 0 \leq x \leq \frac{y}{3}\}$, obtemos

$$\iint_\Omega e^{y^2} dxdy = \int_0^6 \left(\int_0^{\frac{y}{3}} e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^6 \left[e^{y^2} x \right]_{x=0}^{x=\frac{y}{3}} dy = \int_0^6 \frac{y}{3} e^{y^2} dy = \left[\frac{e^{y^2}}{6} \right]_{y=0}^{y=6} = \frac{e^{36} - 1}{6}.$$

6. Considere a equação diferencial $y'' + \alpha y' + 6y = 12x + 4$.

(a) Calcule o valor de α para o qual a função $y_p(x) = 2x - 1$ é solução da equação.

Resolução:
A função $y_p(x) = 2x-1$ é solução da equação diferencial $y''+\alpha y'+6y = 12x+4$ se, quando substituirmos na equação y por $2x - 1$ obtivermos uma igualdade. Assim, se $y = 2x - 1$, temos que $y' = 2$ e $y'' = 0$ e, substituindo na equação obtemos

$$0 + \alpha.2 + 6(2x - 1) = 12x + 4 \Leftrightarrow 12x + (2\alpha - 6) = 12x + 4 \Leftrightarrow 2\alpha - 6 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 5.$$

(b) Para o valor de α encontrado na alínea anterior, resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$\begin{cases} y'' + \alpha y' + 6y = 12x + 4. \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1 \end{cases}$; *(se não resolveu a alínea a) considere, na resolução da alínea b), $\alpha = 7$)*

Resolução:
Considerando $\alpha = 5$ a equação a resolver é $y'' + 5y' + 6y = 12x + 4$. Começamos por resolver a equação homogénea associada $y'' + 5y' + 6y = 0$. A equação característica, $D^2 + 5D + 6 = 0$ tem 2 raízes reais distintas: $D = -2$, $D = -3$. Desta forma a solução geral da equação homogénea é $y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Pela alínea anterior temos já uma solução particular, $y_p(x) = 2x - 1$ e, obtemos então a solução geral da equação dada que é

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + 2x - 1 \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Resta então determinar a solução particular que verifica $y(0) = -1$ e $y'(0) = 1$:

$$\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1e^0 + C_2e^0 + (0 - 1) = -1 \\ -2C_1 - 3C_2 + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

e concluímos que a solução do problema proposto é

$$y(x) = -e^{-2x} + e^{-3x} + 2x - 1.$$

7. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = xy.g(x^2, 4x^2).$$

(a) Calcule, em função de g e das suas derivadas parciais, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolução:
Sejam u, v funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $u(x) = x^2$ e $v(x) = 4x^2$. Desta forma

$$g(u(x), v(x)) = g(x^2, 4x^2).$$

Sendo $f(x, y) = xy.g(x^2, 4x^2)$ temos (usando a derivada do produto e a derivada da função composta)
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yg(x^2, 4x^2) + xy\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x), v(x))u'(x) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x))v'(x)\right)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xg(x^2, 4x^2)$.
Como $u'(x) = 2x$ e $v'(x) = 8x$ obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yg(x^2, 4x^2) + xy\left(\frac{\partial g}{\partial u}(x^2, 4x^2)2x + \frac{\partial g}{\partial v}(x^2, 4x^2)8x\right) \text{ e} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xg(x^2, 4x^2).$$

(b) Supondo que g é uma função homogénea de grau 4 prove que, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 9g(x^2, 4x^2)$.

Resolução:
Comece por notar que se g é uma função homogénea de grau 4 verifica a identidade de Euler:

$$u.\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + v\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 4g(u,v), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Por definição, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$. Pela alínea anterior temos então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xg(x^2,4x^2)\right) \\
&= g(x^2,4x^2) + x\left(\frac{\partial g}{\partial u}(x^2,4x^2)2x + \frac{\partial g}{\partial v}(x^2,4x^2)8x\right) \\
&= g(x^2,4x^2) + 2\left(x^2\frac{\partial g}{\partial u}(x^2,4x^2) + 4x^2\frac{\partial g}{\partial v}(x^2,4x^2)\right) \\
&= g(x^2,4x^2) + 2(4g(x^2,4x^2)) = 9g(x^2,4x^2),
\end{aligned}$$

sendo a última linha resultado da identidade de Euler para a função g no ponto $(u,v) = (x^2, 4x^2)$.

Cotações:

1a)	1b)	2a)	2b)	3a)	3b)	4	5a)	5b)	6a)	6b)	7a)	7b)
1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	2,0	2,5	1,0	1,5	1,0	1,5	1,5	1,5